

Manuale dello studente¹

¹ Il seguente manuale è solo un esempio di quanto prodotto. Ogni studente ha prodotto un proprio manuale scegliendo tra i materiali prodotti quelli che riteneva più utili.

Il seguente lavoro raccoglie materiali da diversi manuali con lo scopo di evidenziare anche i diversi stili di apprendimento degli studenti. L'analisi non viene fatta in modo esplicito in quanto un esperto della disciplina riesce ad eseguirla in modo autonomo.

I numeri²

ESERCIZI GUIDATI:

Calcolare il valore della seguente espressione:

	$(-\frac{3}{4}) - (-\frac{1}{2}) + (+\frac{5}{8}) - (+2) =$
Eliminiamo le parentesi:	$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} - 2 =$
Riduciamo a denominatore comune (m.c.m) le frazioni e sommiamo algebricamente i numeratori:	$= \frac{-6+4+5-16}{8} = \boxed{\frac{-13}{8}}$

Calcolare il valore della seguente espressione:

	$(-\frac{3}{4} - 1) \cdot (-\frac{3}{2}) =$
Svolgiamo l'addizione algebrica all'interno della parentesi:	$= (-\frac{7}{4}) \cdot (-\frac{3}{2}) =$
Eseguiamo ora la moltiplicazione:	$= +\frac{21}{8}$

Calcolare il valore della seguente espressione:

	$(+\frac{5}{8}) : (+2 - \frac{3}{4}) =$
Svolgiamo l'addizione algebrica all'interno della parentesi:	$= (+\frac{5}{8}) : (\frac{5}{4}) =$
Eseguiamo ora la divisione:	$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Calcolare il valore della seguente espressione:

	$[(-\frac{3}{4} - 1) \cdot (-\frac{3}{2}) + (+\frac{5}{8}) : (+2 - \frac{3}{4})] \cdot (\frac{3}{5} - \frac{7}{25}) - (+\frac{1}{2}) =$
Svolgiamo le addizioni all'interno della parentesi:	$[-\frac{7}{4} \cdot (-\frac{3}{2}) + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5}] \cdot (\frac{8}{25}) - \frac{1}{2} =$
Eseguiamo ora la moltiplicazione e la divisione nella parentesi quadra:	$[+\frac{21}{8} + \frac{4}{8}] \cdot \frac{8}{25} - \frac{1}{2} =$
Sommiamo i numeri nella parentesi quadra:	$= \frac{25}{8} \cdot \frac{8}{25} - \frac{1}{2} =$
Eseguiamo ora la moltiplicazione e infine l'addizione:	$= \boxed{\frac{1}{2}}$

I monomi³

Risolvere le seguenti addizioni algebriche di monomi:

1. $2xy + 3x^2y - 5xy - 5xy - 10x^2y =$

$$= (2 - 5 - 5)x^1y + (3 - 10)x^2y =$$

$$= \boxed{-8xy - 7x^2y}$$

Individuiamo i monomi simili

Mettiamo i coefficienti numerici tra parentesi e ricordiamoci di far precedere la parentesi dal segno +. Eseguiamo i calcoli

2. $-5ab + 4a^3 + 11a^3 + 2ab - 3a^3 + 3ab =$

$$= (-5 + 2 + 3)ab + (4 + 11 - 3)a^3 =$$

$$= \boxed{12a^3}$$

Individuiamo i monomi simili

Mettiamo i coefficienti numerici tra parentesi e ricordiamoci di far precedere la parentesi dal segno +. Eseguiamo i calcoli

3. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}xy - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x =$

$$= \left(\frac{3-4+3}{6}\right)x + \left(-\frac{3}{4}\right)xy =$$

$$= \frac{2}{6}x - \frac{3}{4}xy =$$

Individuiamo i monomi simili

Mettiamo i coefficienti numerici tra parentesi e ricordiamoci di far precedere la parentesi dal segno +. Eseguiamo i calcoli

Risolvere le seguenti espressioni contenenti monomi:

4. $3a \cdot (2ab) - 4a^2b + 3ab^2 - 2b \cdot (3ab) - 3ab^2 =$

$$= 6a^2b - 4a^2b + 3ab^2 - 6ab^2 - 3ab^2 =$$

$$= (6 - 4)a^2b - 6ab^2 =$$

$$= \boxed{2a^2b - 6ab^2}$$

Eseguiamo le moltiplicazioni tra monomi

Individuiamo i monomi simili

Mettiamo i coefficienti numerici tra parentesi e ricordiamoci di far precedere la parentesi dal segno +. Eseguiamo i calcoli

5. $2x \cdot (3x^2y) - 3x^3y + 2x^2 \cdot (6xy) - 4xy \cdot (3x^2) - 10x^3y =$

$$= 6x^3y - 3x^3y + 12x^3y - 12x^3y - 10x^3y =$$

$$= \boxed{-4x^3y}$$

Eseguiamo le moltiplicazioni tra monomi

Individuiamo i monomi simili
Mettiamo i coefficienti numerici tra parentesi e ricordiamoci di far precedere la parentesi dal segno +. Eseguiamo i calcoli

6. $2x(x^2y + x^2y) + (-x^3)y + 5x^3y - x^3y =$

$$= 2x \cdot 2x^2y - x^3y + 5x^3y - x^3y =$$

$$= 4x^3y - x^3y + 5x^3y - x^3y =$$

$$= \boxed{7x^3y}$$

Risolviamo i calcoli all'interno della parentesi

Eseguiamo le moltiplicazioni ed individuiamo i monomi simili

Mettiamo i coefficienti numerici tra parentesi e ricordiamoci di far precedere la parentesi dal segno +. Eseguiamo i calcoli

7. $3a \cdot (2a^2b)^2 - \frac{1}{2}a^2b + 3a^5b^2 - \frac{3}{4}a^2b - \frac{2}{7}a^3 \cdot (-b)^2 =$

$$= 3a \cdot 4a^4b^2 - \frac{1}{2}a^2b + 3a^5b^2 - \frac{3}{4}a^2b - \frac{2}{7}a^3 \cdot b^2 =$$

$$= 12a^5b^2 - \frac{1}{2}a^2b + 3a^5b^2 - \frac{3}{4}a^2b - \frac{2}{7}a^3b^2 =$$

$$= 15a^5b^2 + \left(\frac{-2-3}{4}\right)a^2b - \frac{2}{7}a^3b^2 = 15a^5b^2 - \frac{5}{4}a^2b - \frac{2}{7}a^3b^2$$

Risolviamo le potenze di monomi

Eseguiamo le moltiplicazioni ed individuiamo i monomi simili

Mettiamo i coefficienti numerici tra parentesi e ricordiamoci di far precedere la parentesi dal segno +. Eseguiamo i calcoli

Il lessico⁴

L'opposto di a : $-a$

Il quadrato di a : a^2

Il cubo di a : a^3

L'opposto del quadrato di a : $-(a^2)$

L'opposto del cubo di a : $-(a^3)$

Il quadrato dell'opposto di a : $(-a)^2$

Il reciproco di a : $\frac{1}{a}$

Completare la tabella:

	$a = -\frac{3}{4}$	$a = +2$
L'opposto di a	$+\frac{3}{4}$	-2
Il quadrato di a	$(-\frac{3}{4})^2 = +\frac{9}{16}$	$+2^2 = 4$
Il cubo di a	$(-\frac{3}{4})^3 = -\frac{27}{64}$	$+2^3 = 8$
L'opposto del quadrato di a	$-(\frac{3}{4})^2 = -\frac{9}{16}$	$-(2)^2 = -4$
L'opposto del cubo di a	$-(-\frac{3}{4})^3 = +\frac{27}{64}$	$-(-2)^3 = -8$
Il quadrato dell'opposto di a	$(+\frac{3}{4})^2 = +\frac{9}{16}$	$(-2)^2 = -4$
Il reciproco di a	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{1}{2}$

	$a = -1$	$a = -\frac{1}{2}$
L'opposto di a	$+1$	$+\frac{1}{2}$
Il quadrato di a	$(-1)^2 = +1$	$(-\frac{1}{2})^2 = +\frac{1}{4}$
Il cubo di a	$(-1)^3 = -1$	$(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
L'opposto del quadrato di a	$-(-1)^2 = -1$	$-(-\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$
L'opposto del cubo di a	$-(-1)^3 = +1$	$-(-\frac{1}{2})^3 = +\frac{1}{8}$
Il quadrato dell'opposto di a	$[-(-1)]^2 = +1$	$[-(-\frac{1}{2})]^2 = +\frac{1}{4}$
Il reciproco di a	-1	$-\frac{2}{1}$

⁴ Alcuni esempi di semplice lessico matematico necessario al lavoro successivo e alla vita quotidiana

I problemi⁵

Problema 1

Paolo ha nel portafoglio x euro; Giovanni ha nel portafoglio 3 euro in più del doppio di quelli che ha Paolo. Quale espressione rappresenta la somma, in euro, che hanno complessivamente nei portafogli i due amici?

Dati:

Giovanni = $3 + 2x$

Paolo = x

? = soldi totali

Terminologia

Doppio: $2 \times n = 2n$

Triplo: $3n$

Metà: $2/n = \frac{n}{2}$

3 in più: $3+n$

Svolgimento:

Paolo + Giovanni = $x + 3 + 2x = 3x + 3$

⁵ I seguenti problemi sono stati affrontati in laboratorio informatico. Ogni studente ha risolto l'esercizio decidendo il modo autonomo la componente grafica, la distribuzione del testo nella pagina e le informazioni che riteneva necessario individuare o aggiungere per portare a termine il lavoro. I lavori riportati nelle pagine seguenti sono alcuni esempi di quelli prodotti dagli studenti.

I testi dei problemi sono stati tratti da diversi libri di testo e siti internet.

Problema 1: testo

Paolo ha nel portafoglio x euro; Giovanni ha nel portafoglio 3 euro in più del doppio di quelli che ha Paolo. Quale espressione rappresenta la somma, in euro, che hanno complessivamente nei portafogli i due amici?

Doppio di x :
 $2x$

$3 + \dots$

Dal testo ad una prima codifica matematica

Paolo= x

Giovanni= $3+2x$

?=somma complessiva nei portafogli dei due amici

Svolgimento

Paolo+Giovanni= $x+3+2x$

= $3x+3$

Problema 2

In un garage il numero degli scooter supera di 7 quello delle automobili e le biciclette sono la metà degli scooter. Indica con x il numero delle automobili ed esprimi con un polinomio ridotto il numero delle ruote presenti nel garage.

Dati:

Automobili= x

ruote automobili= $4x$

Scooter= $x+7$

ruote scooter= $2(x+7)=2x+14$

Bici= $(x+7):2$

ruote bici= $2[(x+7):2]=(2x+14):2=x+7$

Svolgimento:

$$\text{Ruote} = x + 7 + 2x + 14 + 4x = 7x + 21$$

PROBLEMA:

In un garage il numero degli scooter supera di 7 quello delle automobili e le biciclette sono la metà degli scooter. Indica con x il numero delle automobili ed esprimi con un polinomio ridotto il numero delle ruote presenti nel garage.

DATI DEL PROBLEMA:

$$\text{Automobili} = x$$

$$\text{Scooter} = 7 + \text{auto} = 7 + x$$

$$\text{Biciclette} = \text{metà scooter} = \frac{7+x}{2}$$

E ora le ruote!

<i>nella realtà</i>	<i>nel problema</i>
<i>Ruote automobili = 4</i>	<i>Ruote automobili = 4x</i>
<i>Ruote Scooter = 2</i>	<i>Ruote Scooter = 2(7+x)</i>
<i>Ruote Biciclette = 2</i>	<i>Ruote Biciclette = 2(\frac{7+x}{2})</i>

RISOLUZIONE:

$$\text{Ruote totali: } 4x + 2(7+x) + 2(\frac{7+x}{2}) = 4x + 14 + 2x + 7 + x = 7x + 21$$

Problema

Cinque amici vogliono organizzare un cineforum e raccolgono i DVD che hanno a casa. Per accontentare i gusti di tutti, decidono che, se x è il numero totale di DVD da mettere insieme, ciascuno ne dovrà portare $\frac{x}{5}$. In realtà non tutti hanno la quantità richiesta e nello specifico: Lucia 2 di meno, Angelo 2 di più, Fabio tanti quanti Lucia, mentre Anna 2 più di Angelo. Luca è l'unico ad avere la quantità richiesta. Ce la fanno ugualmente a raggiungere l'obiettivo?

DATI :

$$\underline{\text{Lucia}} = \frac{x}{5} - 2$$

$$\underline{\text{Angelo}} = \frac{x}{5} + 2$$

$$\underline{\text{Fabio}} = \underline{\text{Lucia}} = \frac{x}{5} - 2$$

$$\underline{\text{Anna}} = 2 + \text{di Angelo} = \frac{x}{5} + 4$$

$$\underline{\text{Luca}} = \frac{x}{5}$$

RISOLVO

$$\left(\frac{x}{5} - 2\right) + \left(\frac{x}{5} + 2\right) + \left(\frac{x}{5} - 2\right) + \left(\frac{x}{5} + 4\right) + \left(\frac{x}{5}\right) =$$
$$\frac{X - 10 + X + 10 + X - 10 + X + 20 + X}{5} =$$

$$\frac{+10+5X}{5} = 2 + X$$

RISPOSTA

Hanno raggiunto l'obiettivo con 2 dvd in più

PROBLEMA :

Quattro ragazzi hanno affittato per le vacanze un monolocale al mare e devono dividersi le spese tenendo conto che non tutti sono stati presenti per lo stesso periodo. Decidono di mettere in cassa comune un importo iniziale uguale per tutti e una quota per ogni giorno di presenza. **Leonardo** è rimasto 10 giorni, **Luca** è rimasto 4 giorni più di Leonardo, **Ivan** è stato presente un periodo doppio di Leonardo e **Stefano** è rimasto 4 giorni in meno di Ivan. Esprimi l'ammontare della cassa indicando con y l'importo iniziale e con x la quota giornaliera.

Importo iniziale = y (uguale per tutti)

Quota giornaliera = x (quanto pagano ogni giorno)

Leonardo = $y + 10x$

Luca (4 giorni in più di Leo) = $y + 14x$

Ivan (doppio di Leo: 20 giorni) = $y + 20x$

Stefano (4 giorni in meno di Ivan: 16 giorni) = $y + 16x$

Soluzione:

$$(y + 10x) + (y + 14x) + (y + 20x) + (y + 16x) = 60x + 4y$$

Problema

Un canale online che tramette film in streaming mette a disposizione per i propri clienti 7000 titoli. Sapendo che i film di **animazione in 3D sono un terzo dei film dell'orrore (film horror : 3)** e che **questi ultimi sono un ottavo delle commedie (commedie :8)** romantiche e che non ci sono altre tipologie di film, determina il numero di titoli per ciascuna tipologia.

(commedie = x)

Dati

$$T=7000$$

$$C=x$$

$$H=1/8x$$

$$A = 1/3 H=1/3(1/8x)$$

Svolgimento

$$7000=1/3(1/8x)+1/8x+x$$

$$1/8x+x+1/24x=7000$$

$$(3+24+1)x/24=7000$$

$$28x/24=7000$$

$$7/6x=7000$$

$$X=6000$$

$$H=6000:8=750$$

$$A=6000:24=250$$

Problema

Un canale online che tramette film in streaming mette a disposizione per i propri clienti 7000 titoli. Sapendo che i film di animazione in 3D sono un terzo dei film dell'orrore e che questi ultimi sono un ottavo delle commedie romantiche e che non ci sono altre tipologie di film, determina il numero di titoli per ciascuna tipologia.

$$7000 = \text{titoli}$$

$$\text{Commedie romantiche} = x$$

$$\text{Film horror} = 1/8 \text{ delle commedie romantiche} = 1/8 x$$

$$\text{Film animazione in 3D} = 1/3 \text{ dei film horror} = 1/3 (1/8 x)$$

$$1/8 x + x + 1/3 (1/8 x) = 7000$$

$$\frac{1}{8} x + x + \frac{1}{24} x = 7000$$

$$\frac{3x + 24x + x}{24} = 7000$$

$$\frac{28x}{24} = 7000$$

$$\frac{7x}{6} = 7000$$

$$x = 6000$$

$$\text{film horror} = 1/8 : 6000 = 750$$

$$\text{film animazione} = 1/24 : 6000 = 250$$

MATEMATICA: PROBLEMI!!!

In una famiglia ci sono quattro componenti: Alice ha x anni, Andrea ha 2 anni più di Alice, la mamma ha il triplo degli anni di Andrea meno 10, il padre ha l'età della moglie più 2. Determina:

L'espressione algebrica dell'età **media** della famiglia;

L'espressione algebrica dell'età media della famiglia quando si amplia per l'arrivo del **nonno** che ha l'età quadrupla di quella di Alice.

Alice: x

Andrea: $x+2$

Mamma: $3(x+2) - 10$

Papa: $3(x+2) - 10 + 2$

Nonno: $(x)4$

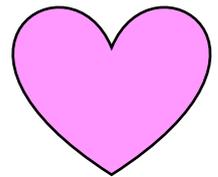
Media = $\text{somma totale} / \text{numero componenti}$

Somma delle età: $x + x + 2 + 3(x+2) - 10 + 3(x+2) - 10 + 2 = x + x + 2 + 3x + 6 - 10 + 3x + 6 - 10 + 2 = 8x - 4$

MEDIA: $(8x - 4) : 4 = 2x - 1$

Nuova somma delle età: (precedente + nonno): $8x + 4x - 4 = 12x - 4$

MEDIA: $(12x - 4) : 5 = (12/5)x - 4/5$



MATEMATICA: PROBLEMI!!!

In una famiglia ci sono quattro componenti:

Alice ha x anni,

Andrea ha 2 anni più di Alice,

la **mamma** ha il triplo degli anni di Andrea meno 10,

il **padre** ha l'età della moglie più 2.

Determina:

L'espressione algebrica dell'età **media** della famiglia;

L'espressione algebrica dell'età media della famiglia quando si amplia per l'arrivo del **nonno** che ha l'età quadrupla di quella di Alice.

$$\text{Alice} = x$$

$$\text{Andrea} = \text{Alice} + 2 = x + 2$$

$$\text{Mamma} = 3 * \text{Andrea} - 10 = 3(x + 2) - 10$$

$$\text{Papà} = \text{Mamma} + 2 = [3(x + 2) - 10] + 2$$

$$\text{Nonno} = (x)4$$

$$\text{Media: } \frac{\text{somma}}{\text{numero componenti}}$$

$$\text{Somma} = x + x + 2 + 3(x + 2) - 10 + 3(x + 2) - 10 + 2 = x + x + 2 + 3x + 6 - 10 + 3x + 6 - 10 + 2 = 8x - 4$$

$$\text{Media: } (8x - 4) : 4 = 2x - 1$$

$$\text{Somma} + \text{nonno} = 8x + 4x - 4 = 12x - 4$$

$$\text{Media: } (12x - 4) : 5 = (12/5)x - 4/5$$

Problema

Una classe organizza una gita scolastica di due giorni. Se aderiscono tutti i 52 alunni occorre versare una determinata quota, che viene successivamente maggiorata di €10 perché 4 allievi non partecipano. Stabilisci quali sono le due quote di partecipazione

Gita 2 giorni

52 alunni

10 euro aggiunti al costo perché 4 alunni non partecipano (48 alunni)

Quali sono le due quote da versare? **(Il totale è lo stesso)**

Quota 1: x

Totale 1: $x \cdot 52$

Quota 2: $x+10$

Totale 2: $48 \cdot (x+10)$

$$x \cdot 52 = 48 \cdot (x+10)$$

$$52x = 48x + 480$$

$$52x - 48x = 480$$

$$4x = 480$$

$$480 : 4 = 120$$

$$x = 120 \quad \text{quota 1}$$

$$\text{quota 2} = 120 + 10 = 130$$